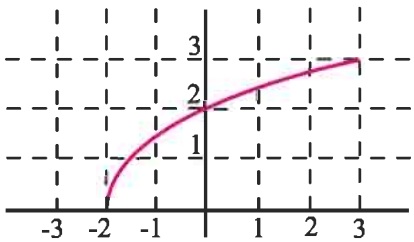
QCM

Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=3$ est encadrée par



☐ 7 et 13. ☐ 15 et 20. ☐ 14 et 21.

2. $I=\int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ et $J=\int_0^1 t\sin^2(\pi t)dt$. Alors $I+J$ est égal à

☐ 1. ☐ $\frac{1}{2}$. ☐ 0.

3. Soit $I=\left|\int_{-1}^1 \frac{-3x^5+5x}{x^4+1}dx\right|$ et $J=\int_{-1}^1 \left|\frac{-3x^5+5x}{x^4+1}\right|dx$. Alors

☐ $I\le J$. ☐ $I=J$. ☐ $I\ge J$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\int_{4\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sin x\,dx$.

2. $\int_{-1}^1 |x|dx=1$.

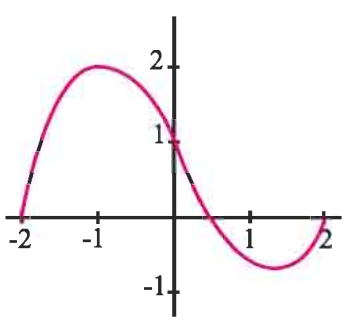
3. Si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est continue sur $[a,b]$ alors

$\int_a^b f(x)\,dx=\left[xf(x)\right]_a^b-\int_a^b xf'(x)dx$.

4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

Si $f\le 1$ alors $\int_0^1 f(x)dx\le 1$.

5. D'après la représentation graphique ci-contre $\int_{-2}^2 f(x)dx\ge 0$.



6. Si $\int_a^b f(x)dx\ge 0$ alors $f\ge 0$ sur $[a,b]$.

7. La fonction $x\mapsto\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1 Calculer les intégrales ci-dessous.

$\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx$; $\int_{1}^{2}t(t+1)^3dt$;

$\int_{-1}^{1}(2x+1)\left(x^2+x-5\right)^3dx$; $\int_{1}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx$;

$\int_{1}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}$; $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,\sin t\,dt$;

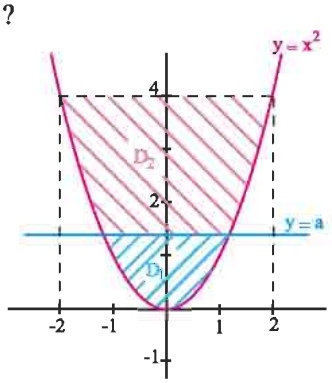
$\int_{-2}^{1}|x(x+1)|dx$; $\int_{-3}^{3}|x^3+x|dx$; $\int_{0}^{3}|2t-1|dt$,

$\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$.

2 le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $a>0$.

Pour quelle valeur de a, les parties D_1 et D_2 ont-elles la même aire ?



3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^3}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C_f.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3. Soit $\lambda<\frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\frac{1}{2}$.

a. Déterminer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

4 1. On considère la fonction h définie sur $]0,\ +\infty[$ par $h(x)=x^2-4x+6-3\sqrt{x}$.

a. Calculer $h''(x)$, $x>0$.

b. Montrer que l'équation $h'(x)=0$ possède une unique solution α appartenant à $]2,\ 3[$.

c. Déterminer le signe de h' et dresser le tableau de variation de h.

d. Calculer $h(1)$ et $h(4)$. En déduire que 1 et 4 sont les uniques solutions de l'équation $h(x)=0$.

2. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0,\ +\infty[$ par $f(x)=x^2-4x+6$ et $g(x)=3\sqrt{x}$.

b. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ définies par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\sin^2 x$.

1. Etudier les fonctions f et g.
2. Etudier la position des courbes C_f et C_g de f et g .
3. Représenter C_f et C_g .
4. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur $[0,\ \pi]$ par $f(x)=x+\sin x$.

1. Etudier les variations de f sur $[0,\ \pi]$.
2. Etudier la position de la courbe C_f de f et de la droite D d'équation $y=x$.
3. Représenter C_f et D.
4. Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et D.

7 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0,\ +\infty[$ par $f(x)=3x^2+\frac{2}{x^3}$ et $g(x)=3x^2$.

2. Soit $\lambda > 0$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda) = \left| \int_1^{\lambda} \frac{2dx}{x^3} \right|$. Calculer $A(\lambda)$.

b. Etudier et représenter la fonction $A : \lambda \mapsto A(\lambda)$.

c. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda) = m$.

8 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]2, +\infty[$ par

$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$ et $g(x) = x + 1$.

2. Soit $\lambda > 2$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda) = \left| \int_3^{\lambda} \frac{4dx}{(x-2)^2} \right|$.

b. Calculer $A(\lambda)$.

c. Etudier et représenter la fonction $A : \lambda \mapsto A(\lambda)$.

d. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda) = m$.

9 On considère les intégrales $A = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$.

1. Calculer A.
2. Calculer $A + B$.
3. En déduire la valeur de B.

10 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

11 1. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} x \cos 2x \, dx$.

2. Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$.

a. Calculer $I + J$ et $I - J$.

b. En déduire les valeurs de I et J.

12 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

3. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{4}]$, $1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

2. En déduire que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

14 On pose $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$.

1. a. Vérifier que pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $0 \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

b. En déduire un encadrement de I.

2. a. Vérifier que pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

b. En déduire un nouvel encadrement de I.

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et on pose $I=\displaystyle\int_{100}^{1000} f(t)dt$.

1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$.

b. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x>0$ $\quad 1-\dfrac{x}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

c. En déduire que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}\le f(x)$.

2. Déterminer un encadrement de I.

16 On considère la fonction f définie sur $]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2. Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, pour tout x de I.

3. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

17 1. Représenter dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

a. Vérifier que $\dfrac{1}{2}\le\mathcal{A}\le 1$.

b. Utiliser la méthode des rectangles, en partageant l'intervalle $[1,2]$ en cinq intervalles d'amplitude 0.2, pour donner un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.

18 Soit la suite (u_n) définie par

$u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\left(x^2+1\right)^2}dx$, $n\ge 1$.

1. Montrer que $0\le\dfrac{x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^2}\le x^{2n+1}$,

pour tout entier $n\ge 1$ et tout $0\le x\le 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

19 Soit la suite (u_n) définie par

$u_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$ et $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx$, $n\ge 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Comparer u_n et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n dx$, $n\ge 1$.

3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

c. Calculer u_2 et u_3.

20 Soit la suite (u_n) définie par

$u_0=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x}dx$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$ $n\ge 1$.

1. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $(3+2n)u_n=2nu_{n-1}$.

c. Calculer u_2 et u_3.

21 Soit la suite (u_n) définie par

$u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $n\ge 1$.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0,2]$.
3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi tangentes aux extrémités des deux courbes.

b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. En déduire $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

23 On considère la fonction f définie sur $[0,3]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1,3]. \end{cases}$

1. Vérifier que f est continue sur $[0,3]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,3]$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a. Expliciter $F(x)$, $x \in [0,3]$.

b. Représenter la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. a. Etudier f.

b. Vérifier que la courbe représentative C_f de f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.

c. Tracer C_f.

2. Pour $x \in [0,1]$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Représenter la partie du plan dont l'aire est égale à $F(1)$. En déduire $F(1)$.

3. Pour tout $a \in [0,1]$, on désigne par θ le réel de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos\theta = a$.

a. Montrer que $F(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$.

b. Calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

25 On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx$.

1. a. Calculer I_0.

b. Vérifier que pour tout n, $0 \le I_{n+1} \le I_n$.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. a. Montrer que pour tout n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

26 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Calculer $\int_1^n f(x)dx$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_1^n f(x)dx \right)$.

2. Soit k un entier naturel non nul.

Calculer $\int_k^{k+1} f(x)dx$.

3. Montrer que la somme $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)}$ converge et déterminer sa limite.

27 On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout entier $n \ge 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1. a. Vérifier que f est décroissante et positive.

b. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2. a. Calculer $\int_1^n f(t)dt$, $n \geq 1$ et en déduire que $0 \leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^n f(t)dt\right)$.

3. a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\int_2^{n+1} f(t)dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt$.

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$.

d. En déduire que la somme $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}$ converge et de donner un encadrement de sa limite.

28 Dans chacun des cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f: x \mapsto x^4 - x^3 + 1$, $I = [-1, 3]$.

2. $f: x \mapsto \frac{1}{x^3} - 1$, $I = [2, 4]$.

3. $f: x \mapsto \sin(2x)$, $I = [0, \pi]$.

29 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$.

30 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 + \tan^2 x}$.

Dans les exercices 31, 32, 33, 34 et 35 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

31 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

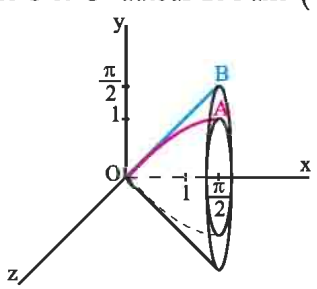
32 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \frac{1}{x},\ 1 \leq x \leq 3\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

33 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \tan x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

34 Soit $C = \{M(x,y) \text{ tels que } y = \sin x + \cos x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

35 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ et $C' = \{M(x, y) \text{ tels que } y = x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$.

On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe (Ox).



Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S'.

36 I. On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $F(x) = x$.

3. Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

II. On considère la suite (I_n) définie par

$$I_n=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^n}dt,\ n\geq 0.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n\right).$$

3. Calculer I_2, I_3 et I_4.

III. On considère la suite (J_n) définie par

$$J_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\ \text{ et }\ J_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt,\ n\geq 1.$$

1. a. Vérifier que pour tout n, $0\leq J_n\leq\frac{1}{1+2n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n$.

2 a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1}+J_n=\frac{1}{1+2n}$.

b. Calculer J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5.

3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{1+2n}.$$

a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1}=(-1)^n(u_n-J_0)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

37 Soit la suite (I_n) définie par

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x+x^2}dx,\ n\geq 1.$$

1. a. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}.$$

b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. a. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$I_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{(1+2x)x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx.$$

b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$1+\frac{1}{3(n+2)}\leq 3(n+1)I_n\leq 1+\frac{3}{n+2}.$$

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n$.

38 On considère la fonction F définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}dt$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x).$$

3. Calculer $\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$.

4. Etudier les variations de F.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

39 On considère la fonction f définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

1. Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.

2. Soit F la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$F(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}dt.$$

a. Montrer que F est dérivable sur $[0,\pi]$ et que

$$F'(x)=-4\sin^2 x,\ x\in[0,\pi].$$

b. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c. En déduire que pour tout $x\in[0,\pi]$,

$$F(x)=-2x+\sin(2x)+\pi.$$

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $y=x$, $x=-2$ et $x=2$.

a. Montrer que $\mathcal{A}=F(0)-F(\pi)$.

b. En déduire $\mathcal{A}$.

QCM :

1) encadré par 7 et 13

2) $I+J=\frac{1}{2}$

3) $I \leq J$

VRAI – FAUX :

1) (vrai)

$$\int_{4\pi}^{9\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_{4\pi}^{\frac{\pi}{2}+4\pi} \sin x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

car 4π est une période de la fonction $x \mapsto \sin x$

(on pourra aussi vérifier le résultat en calculant chacune des deux intégrales)

2) (vrai)

la fonction : $x \mapsto |x|$ est paire

d'où $\int_{-1}^{1} |x| dx = 2.\int_{0}^{1} |x| dx = \int_{0}^{1} 2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$

3) (vrai)

Formule d'intégration par parties :

$U'(x)=1 \xrightarrow{p} U(x)=x$

$V(x)=f(x) \xrightarrow{d} V'(x)=f'(x)$

4) (vrai)

$f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

d'où $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq [x]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq 1$

5) (vrai)

soit :

* A_1 :l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f);

l'axe des abscisses et les droites d'équation :

$x=-2$ et $x=\frac{1}{2}$

* A_2 : l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f),

l'axe des abscisses et les droite d'équation : $x=\frac{1}{2}$ et $x=2$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx = A_1 - A_2 \geq 0$$

6) (faux)

contre exemple : $f(x)=x$, $[a,b]=[-1,2]$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} \geq 0$$

mais f n'est pas positive sur $[-1,2]$

7) (vrai)

la fonction : $f: t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur IR

et $0 \in$ IR

d'où $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est définie , continue

et dérivable sur IR et $F'(x)=f(x)$ (th cours)

EX 1 :

1) $\int_{-1}^{3}(\frac{x^2}{2}-x)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{3}=\frac{2}{3}$

2) $\int_{+1}^{2}t.(t+1)^3.dt=\int_{1}^{2}(t^4+3t^3+3t^2+t).dt$

$=\left[\frac{t^5}{5}+\frac{3t^4}{4}+t^3+\frac{t^2}{2}\right]_1^2=\frac{519}{20}$

3) $\int_{-1}^{1}(2x+1).(x^2+x-5)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x^2+x-5)^4\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{3^4}{4}-\frac{5^4}{4}=\frac{-272}{2}=-136$

4) $\int_{1}^{2}\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}2.\sqrt{2x+1}dx$

$=\frac{1}{2}.\left[\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\right]_1^2=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$

5) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}=\left[\frac{-1}{1+x}\right]_1^2=\frac{1}{6}$

6) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\int_{0}^{4}\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}dx$

$=\left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4=2$

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin t.\cos^4 tdt=\left[\frac{-1}{5}\cos^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8-\sqrt{2}}{40}$

8) $\int_{-2}^{1}|x(x+1)|.dx=I$

x	-2	-1	0	1
x(x+1)	+	0	-	0 +

$I=\int_{-2}^{-1}x(x+1)dx+\int_{-1}^{0}-x(x+1)dx+\int_{0}^{1}x(x+1)dx$

$I=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{5}{3}$

9) $x^3+x=x.(x^2+1)$

$x\mapsto|x^3+x|$ est paire

$\int_{-3}^{3}|x^3+x|dx=2\int_{0}^{3}|x^3+x|dx=2\int_{0}^{3}(x^3+x)dx$

$=2.\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{99}{2}$

10)

t	0	½	3
2t-1	-	0	+

$\int_{0}^{3}|2t-1|dt=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-2t+1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(2t-1)dt$

$=\left[-t^2+t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{13}{2}$

11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx$

$=\int_{0}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=4$

EX 2 :

$aire(D_1\cup D_2)=2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx$

$=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}$

$aire(D_1)=2\int_{0}^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx=2\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}}$

$=2(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3})=\frac{4a\sqrt{a}}{3}$

$aire(D_1)=aire(D_2)$

$\Leftrightarrow aire(D_1)=\frac{1}{2}aire(D_1\cup D_2)$

$\Leftrightarrow\frac{4a\sqrt{a}}{3}=\frac{32}{6}\Leftrightarrow a\sqrt{a}=4\Leftrightarrow(\sqrt{a})^3=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{a}=\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow a=(\sqrt[3]{4})^2\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$

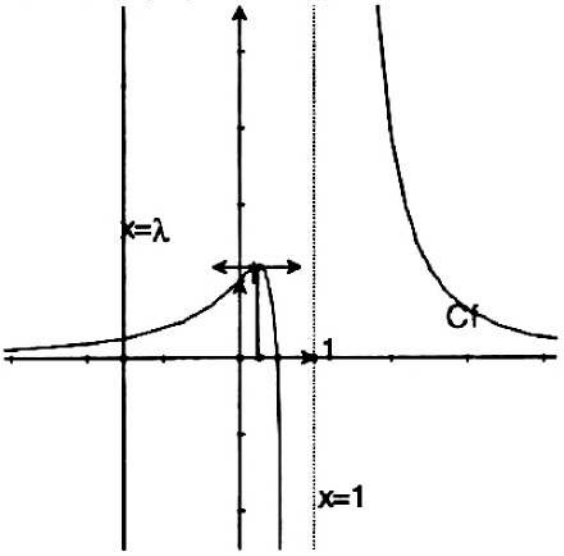
EX 3 :

$f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}$; $D_f = IR/\{1\}$

1) $f'(x)=\dfrac{-4x+1}{(x-1)^4}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f '(x)	+	0	-		-
f(x)	0 ↗	$\frac{32}{27}$	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘ 0

les droites $\Delta : y=0$ et $\Delta' : x=1$
sont des asymptotes à (ζ_f)



2) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}=\dfrac{2(x-1)+1}{(x-1)^3}$

$=\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}$

$(a=2\ ,\ b=1)$

3) $\lambda<\dfrac{1}{2}$

a) $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)dx$

$=\left[\dfrac{-2}{x-1}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=2+\left(\dfrac{2}{\lambda-1}+\dfrac{1}{2(\lambda-1)^2}\right)$

$A(\lambda)=2+\left(\dfrac{2}{\lambda-1}+\dfrac{1}{2(\lambda-1)^2}\right)=2+\dfrac{4\lambda-3}{2(\lambda-1)^2}\ u.a$

b) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 2+\dfrac{4\lambda-3}{2(\lambda-1)^2}=2$

EX 4 :

1) $h(x)=x^2-4x+6-3\sqrt{x}$

a) $h'(x)=2x-4-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$h''(x)=2+\dfrac{3}{4x\sqrt{x}}$

b) $h''(x)>0$; $\forall x\in\ ]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
h''(x)	|	+	
h'(x)	$-\infty$ ↗		$+\infty$

h' est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$
elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR
comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0,+\infty[$ tel que : $h'(\alpha)=0$
$h'(2)\times h'(3)=..<0$
$\Rightarrow\ 2<\alpha<3$

c)

x	0		α		$+\infty$
h'(x)	|	-	0		+

x	0		α		$+\infty$
h'(x)	|	-	0		+
h(x)	| 6	↘	$h(\alpha)$	↗	$+\infty$

d) h(1)=0

h(4)=0

* h est strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$

$4\in[\alpha,+\infty[$ et h(4)=0

d'où l'équation h(x)=0 admet 4 comme unique solution sur $[\alpha,+\infty[$

* de meme : h(1)=0

hest strictement décroissante sur $]0,\alpha[$

d'où 1 est la seule solution de l'équation h(x)=0 dans $]0,\alpha[$

conclusion : l'équation h(x)=0 admet 1 et 4 comme solutions dans $]0,+\infty[$

2) a) $f(x)=x^2-4x+6$

$g(x)=3\sqrt{x}$

x	0		2		+∞
f'(x)	|	-	0	+	
f(x)	| 6	↘	2	↗	+∞

$f'(x)=2(x-2)$

$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

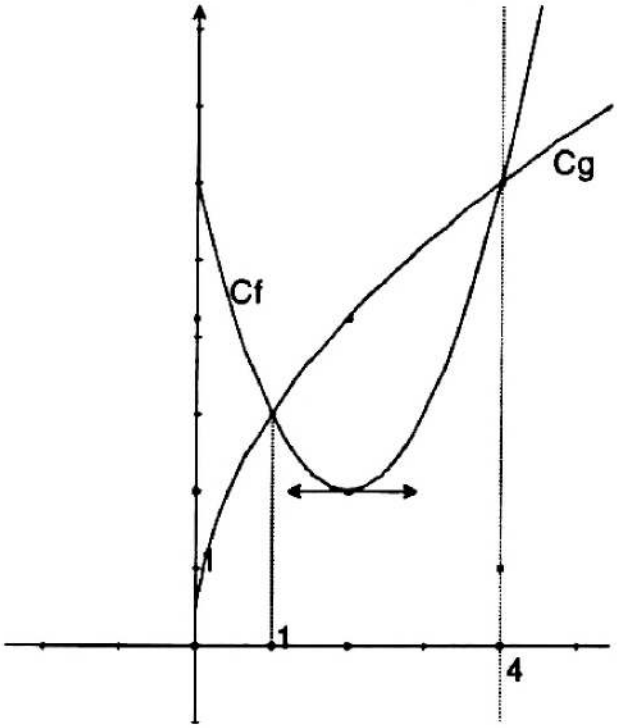
branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

* $g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

x	0		+∞
g'(x)	|	+	
g(x)	| 0	↗	+∞

$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}}=0$

branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$



b) $A=\int_1^4(g(x)-f(x)dx=\int_1^4(3\sqrt{x}-x^2+4x-6)dx$

$A=\left[2x\sqrt{x}-\dfrac{x^3}{3}+2x^2-6x\right]_1^4=5\ u.a$

EX 5 :

$\begin{cases}f(x)=\sin x\\ g(x)=\sin^2 x\end{cases}$ $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

1) f et g sont dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)=\cos x$

$g'(x)=2\sin x\cos x$

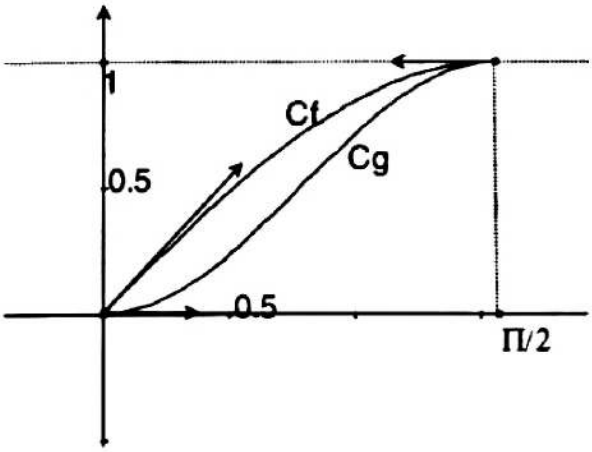
x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)	0	+	0
g(x)	0	↗	1

2) $f(x)-g(x)=\sin x(1-\sin x)\geq 0 \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(ζ_f) est au dessus de (ζ_g)

3)



4) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

$A=1-\frac{\pi}{4}$ *u.a*

EX 6 :

$x\in[0,\pi]$

$f(x)=x+\sin x$

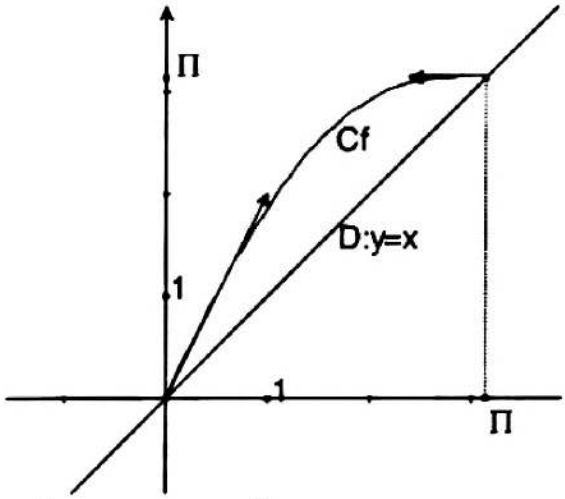
1) $f'(x)=1+\cos x\geq 0$

x	0		π
f'(x)	2	+	0
f(x)	0	↗	π

2) $f(x)-x=\sin x\geq 0$

(ζ_f) est au dessus de D

3)



4) $A=\int_0^{\pi}(f(x)-x)dx=\int_0^{\pi}\sin x dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$ *u.a*

EX 7 :

$x\in\ ]0,+\infty[$

1) $f(x)=3x^2+\frac{2}{x^3}$

$g(x)=3x^2$

- $f'(x)=6x-\frac{6}{x^4}=\frac{6(x^5-1)}{x^4}$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

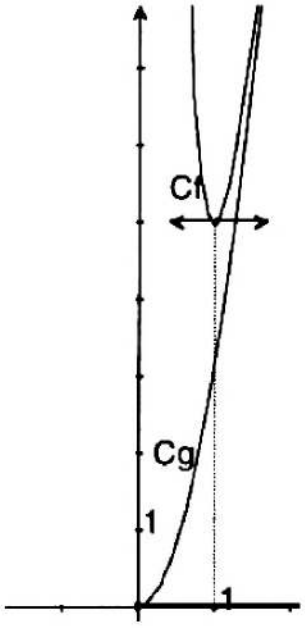
- $g'(x)=6x$

x	0		$+\infty$
g'(x)	||	+	
g(x)	0	↗	$+\infty$

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

(ζ_f) et (ζ_g) admettent chacune d'elles une branche infine parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

Rq: f(x)>g(x) ; $\forall x \in]0,+\infty[$



2) □si $\lambda \geq 1$

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(f(x)-g(x))dx=\int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx$$

□si $0<\lambda<1$

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}(f(x)-g(x))dx=\int_{\lambda}^{1}\frac{2}{x^3}dx=-\int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx$$

d'où $A(\lambda)=\left|\int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx\right|$ car $A(\lambda)\geq 0$

$$A(\lambda)=\left|\int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx\right| = A(\lambda)=\left|\left[\frac{-1}{x^2}\right]_1^{\lambda}\right|=\left|1-\frac{1}{\lambda^2}\right|$$

b) $\begin{cases} A(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}-1 & \text{si } 0<\lambda<1 \\ A(\lambda)=1-\frac{1}{\lambda^2} & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases}$

□ dérivabilité en 1 :

$$\lim_{\lambda\to 1^-}\frac{A(\lambda)-A(1)}{\lambda-1}=\lim_{\lambda\to 1^-}\frac{-(1+\lambda)}{\lambda^2}=-2$$

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\frac{A(\lambda)-A(1)}{\lambda-1}=\lim_{\lambda\to 1^+}\frac{1+\lambda}{\lambda^2}=2$$

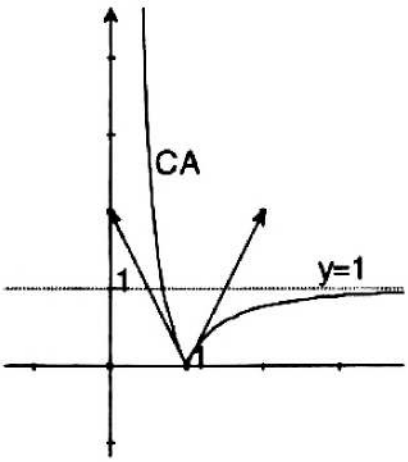
le point I(1,0) est un point anguleux

$\begin{cases} A'(\lambda=\frac{-2}{\lambda^3} & \text{si } 0<\lambda<1 \\ A'(\lambda)=\frac{2}{\lambda^3} & \text{si } \lambda>1 \end{cases}$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}(1-\frac{1}{\lambda^2})=1$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+}A(\lambda)=+\infty$$

λ	0		1		+∞
A'(λ)	‖	-	‖	+	
A(λ)	‖ +∞	↘	0	↗	1



c) □si : $m \in]-\infty,0[$

l'équation : $A(\lambda)=m$ n'a pas de solutions

□si : $m \in \{0\} \cup [1,+\infty[$: une seule solutions

□si : $m \in]0,1[$: deux solutions

EX 8 :

1) $x \in]2,+\infty[$

$$f(x) = x+1+\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = x+1$$

(ζ_g) est la droite d'équation : y=x+1

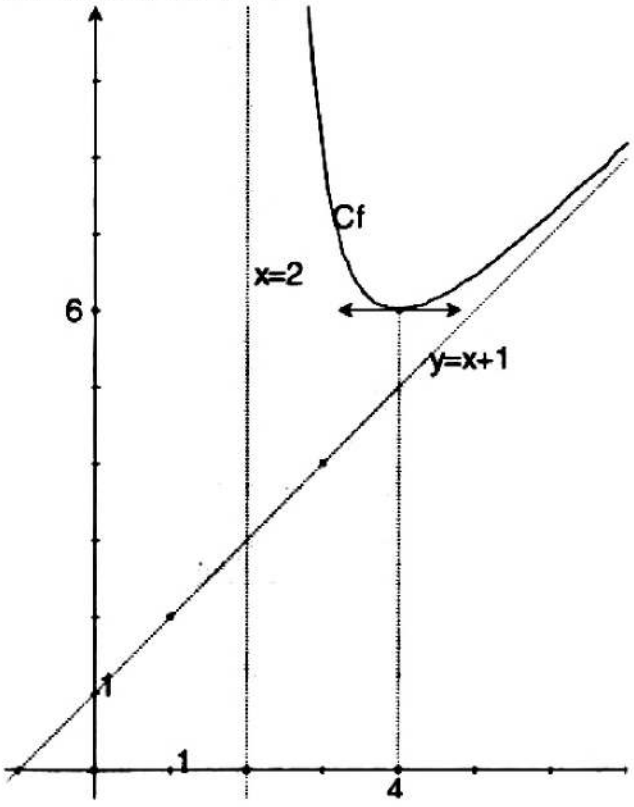
$$f'(x) = 1-\frac{8}{(x-2)^3} = \frac{(x-2)^3-2^3}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(x-4)\left[(x-2)^2+2(x-2)+4\right]}{(x-2)^3}$$

x	2		4		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{(x-2)^2} = 0$$

(ζ_g) : y=x+1 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $(+\infty)$



2) $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in]2,+\infty[$

a) si $\lambda \geq 3$

$$A(\lambda) = \int_3^{\lambda}(f(x)-g(x))dx = \int_3^{\lambda}\frac{4}{(x-2)^2}dx$$

si $2<\lambda<3$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{3}\frac{4}{(x-2)^2}dx = -\int_3^{\lambda}\frac{4}{(x-2)^2}dx$$

$A(\lambda) \geq 0$

d'où $A(\lambda) = \left|\int_3^{\lambda}\frac{4}{(x-2)^2}dx\right|$

b) $A(\lambda) = \left|\left[\frac{-4}{x-2}\right]_3^{\lambda}\right| = \left|4-\frac{4}{\lambda-2}\right|$

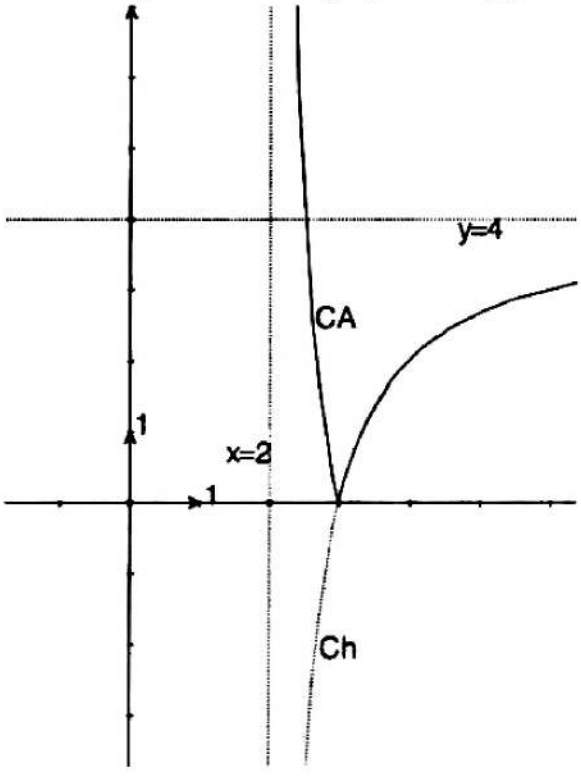
c) soit $h(\lambda) = 4-\frac{4}{\lambda-2}$

$$\begin{cases} A(\lambda) = h(\lambda) & \text{si } \lambda \geq 3 \\ A(\lambda) = -h(\lambda) & \text{si } 2<\lambda<3 \end{cases}$$

$$h'(\lambda) = \frac{4}{(\lambda-2)^2} > 0$$

λ	2		$+\infty$
h'(λ)	||	+	
h(λ)	|| $-\infty$	↗	4

$x = 2$ et y=4 sont les asymptotes à (ζ_h)



d) $m<0$

l'équation $A(\lambda)=m$ n'a pas de solution

$m \in]0,4[$

l'équation $A(\lambda)=m$ admet deux solutions

$m \in \{0\} \cup [4,+\infty[$

l'équation admet une seule solution

EX 9 :

1) $A=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^3}dx$

$=\left[\frac{-1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^1=\frac{3}{16}$

2) $A+B=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\left[\frac{-1}{2(1+x^2)}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

3) $\begin{cases} A=\frac{3}{16} \\ A+B=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow B=\frac{1}{16}$

EX 10 :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

EX 11 :

1) onpose :

$\begin{cases} U'(x)=\cos 2x \xrightarrow{P} U(x)=\frac{1}{2}\sin 2x \\ V(x)=x \xrightarrow{d} V'(x)=1 \end{cases}$

d'où : $\int_0^{\pi} x\cos 2x dx=\left[\frac{1}{2}x.\sin(2x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x dx$

$\int_0^{\pi} x\cos 2x dx=0+\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$

2) a)

* $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$

* $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx=0$

b) $\begin{cases} I+J=\frac{\pi^2}{8} \\ I-J=0 \end{cases}$ d'où $I=J=\frac{\pi^2}{16}$

EX 12 :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=[tgx]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

2) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$; $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$f'(x)=\frac{\cos x.\cos^3 x-\sin x(-3\sin x\cos^2 x)}{\cos^6 x}$

$=\frac{\cos^4 x+3\sin^2 x.\cos^2 x}{\cos^6 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$

$=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{3}{\cos^2 x}$

$f'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$

3) $\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{1}{3}\left[f'(x)+\frac{2}{\cos^2 x}\right]$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\left[f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\times 1\right)=\frac{1}{3}\left(f(\frac{\pi}{4})-f(0)+2\right)=\frac{4}{3}$

EX 13 :

$f(x)=\frac{1}{\cos x}\quad ;x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

1) $0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le 1$

$\Rightarrow 1\le\frac{1}{\cos x}\le\sqrt{2}\Rightarrow 1\le f(x)\le\sqrt{2}$

2) $1\le f(x)\le\sqrt{2}\quad ;\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}$

$\Rightarrow(\frac{\pi}{4}-0)\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\le\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}-0)$

$\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\le\frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$

EX 14 :

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$

1) a) $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\Rightarrow(\frac{\pi}{2})^2\le x^2\le\pi^2$

$\Rightarrow 1+(\frac{\pi}{2})^2\le 1+x^2\le 1+\pi^2$

$\Rightarrow\frac{1}{1+\pi^2}\le\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$

on a aussi : $0\le\sin x\le 1$

d'où $0\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$

b) $0\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}\quad ;\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

d'où : $0\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}dx$

$\Rightarrow 0\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{\pi}{2(1+(\frac{\pi}{2})^2)}$

d'aprés a) : $\frac{1}{1+\pi^2}\le\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

d'où $\frac{\sin x}{1+\pi^2}\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{\sin x}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$ car $\sin x\ge 0$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\pi^2}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+(\frac{\pi}{2})^2}dx$

$\Rightarrow\frac{1}{1+\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$

d'où $\frac{1}{1+\pi^2}\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$

Ex 15 :

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\quad ;x\in\mathbb{R}_+$

$I=\int_{100}^{1000}f(t).dt$

1) a) pour $x>0$: $1+x^4\ge x^4$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^4}\ge x^2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\le\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{x^2}$ pour $x>0$

b) x>0

soit $g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}$; $t\geq 0$

$g'(t)=\frac{-1}{2(\sqrt{1+t})^3}$

$t\geq 0 \Rightarrow 1+t\geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+t}\geq 1 \Rightarrow (\sqrt{1+t})^3\geq 1$

$\Rightarrow 2(\sqrt{1+t})^3\geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2(\sqrt{1+t})^3}\leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow g'(t)\geq -\frac{1}{2}$

$g'(t)\geq -\frac{1}{2}$; $\forall t\in[0,x]$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$g(x)-g(0)\geq -\frac{1}{2}(x-0)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}}-1\geq -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t}}\geq 1-\frac{1}{2}x$

c) t>0 pour $x=\frac{1}{t^2}>0$

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\geq 1-\frac{1}{2t^2} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 1-\frac{1}{2t^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\geq \frac{1}{t}-\frac{1}{2t^3}$

pour $t=x^2$

on aura : $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\geq \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^6}$

$\Rightarrow f(x)\geq \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^6}$

2) pour $t\in[100,1000]$

$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2t^6}\leq f(t)\leq \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow \int_{100}^{1000}(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2t^6})dt\leq \int_{100}^{1000} f(t)dt\leq \int_{100}^{1000}\frac{1}{t^2}dt$

$\Rightarrow \left[\frac{-1}{t}+\frac{1}{10t^5}\right]_{100}^{1000}\leq I\leq \left[\frac{-1}{t}\right]_{100}^{1000}$

$10^{-2}-10^{-3}+10^{-16}-10^{-11}\leq I\leq 10^{-2}-10^{-3}$

EX 16 :

$f(x)=\frac{1}{\sin x}$; $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

1) $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}>0$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1}{\sin x}=1$

$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x}=+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

elle réalise donc une bijection de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

sur $f(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[)=]1,+\infty[=I$

2) f est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

et $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$=\frac{1}{f'(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)$, $f(y)=x$, $\frac{1}{\sin y}=x$, $\sin y=\frac{1}{x}$

$=\frac{-\sin^2 y}{\cos y}$

$y\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\rightarrow \cos y<0$

$\cos y=-\sqrt{1-\sin^2 y}=-\sqrt{1-1/x^2}$

d'où $(f^{-1})'(x)=\frac{\frac{-1}{x^2}}{-\sqrt{1-1/x^2}}=\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

3) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}(f^{-1})'(t)dt=\left[f^{-1}(t)\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}$

$=f^{-1}(\sqrt{2})-f^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$

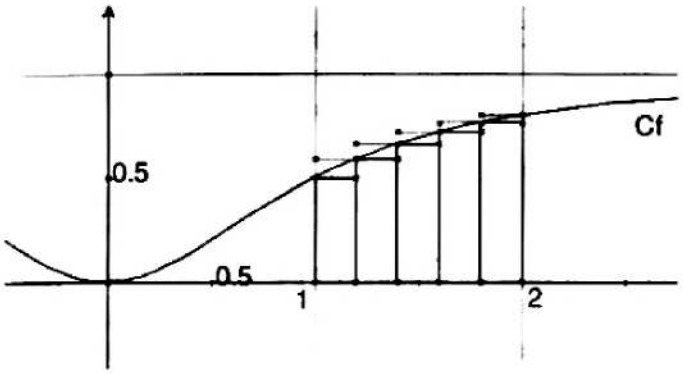
EX 17 :

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; $D_f = IR$

$f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

f est paire

x	0		+∞
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1



2) a) $A=\int_1^2 f(x)dx$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow f(1) \le f(x) \le f(2)$

(car f est croissante sur $[1,2]$)

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{4}{5} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le f(x) \le 1$

d'où $\int_1^2 \frac{1}{2}dx \le \int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 dx \Rightarrow \frac{1}{2} \le A \le 1$

b) a_i : l'aire du rectangle r_i

A_i :l'aire du rectangle R_i

$\sum_{k=1}^{5} a_i \le A \le \sum_{k=1}^{5} A_i$

$\sum_{k=1}^{5} a_i = (0,2)\times f(1)+(0,2).f(1,2)+(0,2).f(1,4)$

$+(0,2).f(1,6)+(0,2).f(1,8)$

$=(0,2).[f(1)+f(1,2)+f(1,4)+f(1,6)+f(1,8)]$

$\sum_{k=1}^{5} A_i = (0.2).[f(1,2)+f(1,4)+f(1,6)+f(1,8)+f(2)]$

(calculatrice)

EX 18 :

$U_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{(x^2+1)^2}dx$; $(n \ge 1)$

1) $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+x^2 \le 2$

$\Rightarrow 1 \le (1+x^2) \le 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le \dfrac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^2} \le x^{2n+1}$

2) pour $x \in [0,1]$

$0 \le \dfrac{x^n}{(1+x^2)^2} \le x^n$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \int_0^1 x^4 dx \Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \dfrac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

EX 19 :

$U_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

$U_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x dx$

1) $U_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\cos 2x\, dx$

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow x^{n+1} \le x^n$

$\Rightarrow x^{n+1}.\cos 2x \le x^n.\cos 2x \quad (\cos 2x \ge 0)$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\cos 2x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x\, dx$

$\Rightarrow U_{n+1} \le U_n$

(U_n) est décroissante

2) pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\cos 2x \le 1$

$x^n.\cos 2x \le x^n$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\, dx$

$\Rightarrow U_n \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\, dx$

3) $x^n.\cos 2x \ge 0$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x\, dx \ge 0 \Rightarrow U_n \ge 0$

* $0 \le U_n \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\, dx$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}(\frac{\pi}{4})^{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}(\frac{\pi}{4})^{n+1} = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) a) * $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$U_0 = \frac{1}{2}$

* $U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos 2x\, dx$

intégrant par parties, on pose :

$$\begin{cases} U'(x)=\cos 2x \xrightarrow{P} U(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \\ V(x) = x \xrightarrow{d} V'(x) = 1 \end{cases}$$

$U_1 = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x dx$

$U_1 = \frac{\pi}{8} + \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

b) $U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+2}.\cos 2x dx$

intégration par parties, on pose :

$$\begin{cases} U'(x)=\cos 2x \xrightarrow{P} U(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \\ V(x) = x^{n+2} \xrightarrow{d} V'(x) = (n+2)x^{n+1} \end{cases}$$

$U_{n+2} = \left[\frac{1}{2}x^{n+2}.\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{(n+2)}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx$

$U_{n+2} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^{n+2} - \frac{(n+2)}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx$ (1)

faisons une 2éme intégration par parties :

$$\begin{cases} U'(x)=\sin 2x \xrightarrow{P} U(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \\ V(x) = x^{n+1} \xrightarrow{d} V'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx = \left[\frac{-x^{n+1}}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{(n+1)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx = \frac{(n+1)}{2}.U_n$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$

$U_{n+2} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^{n+2} - \frac{(n+1)(n+2)}{4}.U_n$

c)

* $U_2 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$

* $U_3 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^3 - \frac{3}{2}U_1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^3 - \frac{3}{2}(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4})$

$U_3 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^3 - \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{8}$

EX 20 :

$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}.dx$

$U_n = \int_0^1 x^n.\sqrt{1-x}.dx$

1) $0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0 \Rightarrow 0 \le 1-x \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \sqrt{1-x} \le 1 \Rightarrow 0 \le x^n.\sqrt{1-x} \le x^n$

d'où $0 \le \int_0^1 x^n.\sqrt{1-x}.dx \le \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

2) pour $n \ge 1$

on a : $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'où : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) a)

* $U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}.dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$U_0 = \frac{2}{3}$

* $U_1 = \int_0^1 x.\sqrt{1-x}.dx$

intégrations par parties :

$\begin{cases} U'(x)=\sqrt{1-x} \xrightarrow{p} U(x) = \frac{-2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \\ V(x) = x \xrightarrow{d} V'(x) = 1 \end{cases}$

$U_1 = \left[\frac{-2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}.dx$

$U_1 = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}.dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 \sqrt{1-x}.dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x}.dx\right)$

$U_1 = \frac{2}{3}(U_0 - U_1)$

$\Rightarrow 3U_1 = 2U_0 - 2U_1 \Rightarrow 5U_1 = 2U_0 \Rightarrow U_1 = \frac{2}{5}U_0$

$U_1 = \frac{4}{15}$

b) pour $n \ge 2$

$U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}.dx$

on pose : $\begin{cases} U'(x)=\sqrt{1-x} \longrightarrow U(x) = \frac{-2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \\ V(x) = x^n \longrightarrow V'(x) = n.x^{n-1} \end{cases}$

$U_n = \left[\frac{-2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$

$U_n = \frac{2n}{3}\left(\int_0^1 (x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x})dx\right)$

$U_n = \frac{2n}{3}\left(\int_0^1 (x^{n-1}\sqrt{1-x})dx - \int_0^1 (x^n\sqrt{1-x})dx\right)$

$U_n = \frac{2n}{3}(U_{n-1} - U_n)$

$\Rightarrow U_n = \frac{2n}{3}U_{n-1} - \frac{2n}{3}U_n$

$\Rightarrow 3U_n = 2nU_{n-1} - 2nU_n$

$\Rightarrow (3+2n).U_n = 2n.U_{n-1}$

pour n=1 : $(3+2)U_1 = 2n.U_0$

$5U_1 = 2U_0$ (vrai)

d'où : $(3+2n)U_n = 2nU_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) * $(3+4)U_2 = 4U_1 \Rightarrow U_2 = \frac{4}{7}U_1 \Rightarrow U_2 = \frac{16}{105}$

* $(3+6)U_3 = 6U_2 \Rightarrow U_3 = \frac{6}{9}U_2 \Rightarrow U_3 = \frac{2}{3}U_2 \Rightarrow U_3 = \frac{32}{315}$

EX 21 :

$n \ge 1$

$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) $U_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

2) pour $0 \le x \le 1$ on a : $1 \le \sqrt{1+x^2} \le 2$

$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le x^n$

d'où $0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \le \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

3) $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$; pour $n \ge 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}=0$ d'où : $\lim_{n\to+\infty} U_n=0$

EX 22 :

$x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$f(x)=tg^3x+tgx$

1) $f'(x)=3(1+tg^2x)tg^2x+(1+tg^2x)$

$f'(x)=(1+tg^2x)(1+3tg^2x)>0$

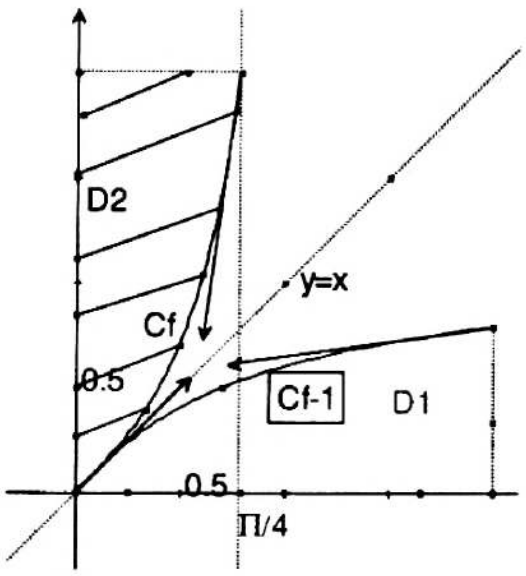
x	0		$\frac{\pi}{4}$
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	2

2) f est continue et stictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

elle réalise donc une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=[0,2]$

3) a) $f_d'(0)=1$; $f_g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8$



b) $* \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x).tgx.dx=\left[\frac{1}{2}tg^2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

$* \int_0^2 f^{-1}(x)dx$ représente l'aire de la partie du plan

limitée par $(\zeta_{f^{-1}})$ et les droites d'équations : y=0 , x=0

et x=2

$\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\text{aire}(D_1)=\text{aire}(D_2)$ (voir figure)

d'où : $\int_0^2 f^{-1}(x)dx=2\times\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

EX 23 :

$x \in [0,3]$

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x\in\,]1,3] \end{cases}$$

1) f est continue sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1$

$*f(1)=1$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x)=1=f(1)$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2}=1=f(1)$

d'où f est continue en 1

par suite f est continue sur $[0,3]$

2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) pour $x \in [0,1]$

$F(x)=\int_0^x t.dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}$ pour $x \in [0,1]$

pour $x \in\,]1,3]$

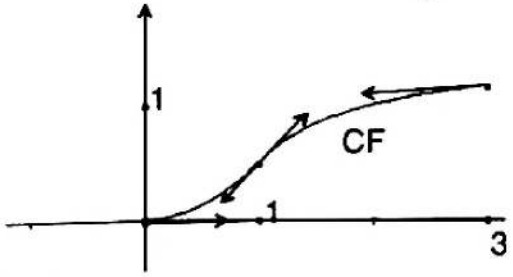
$F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^1 t.dt+\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{3}{2}-\frac{1}{x} & \text{si } x\in\,]1,3] \end{cases}$$

b) $F'(x)=f(x)\geq 0$

$F'(1)=f(1)=1$; $F'(0)=0$; $F(3)=\frac{1}{9}$



EX 24 :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $x\in[0,1]$

1) a) f est continue sur $[0,1]$

f est dérivable sur $[0,1[$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{-(1-x)}=\lim_{x\to 1^-}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}=-\infty$$

f non dérivable à gauche en 1

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\leq 0$$

x	0	1
f'(x)	0	- |
f(x)	1 ↘	0

b) $M(x,y)\in(\zeta_f) \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

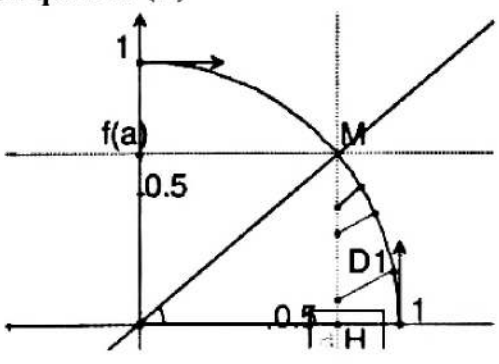
$\Leftrightarrow y^2=1-x^2$ avec $\begin{vmatrix} y\in[0,1] \\ x\in[0,1]\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ avec $\begin{vmatrix} y\in[0,1] \\ x\in[0,1]\end{vmatrix}$

(ζ_f) est la partie du cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 tel que : $0\leq x\leq 1$ et $0\leq y\leq 1$

(ζ_f) est un quart de (Γ)

c)



2) $F(x)=\int_0^x f(t).dt$; $x\in[0,1]$

F(1) : l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f) et les axes du repère

$F(1)=\frac{1}{4}\text{aire}(\Gamma)=\frac{1}{4}(\pi\times 1^2)=\frac{\pi}{4}$

3) $a\in[0,1]$

$a=\cos\theta$; $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) $F(a)=\int_0^a f(t).dt$

F(a): représente l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f) et les droites d'équation : y=0 , x=0 et x=a

* soit M(a,f(a))

H : son projeté orthogonal sur (Ox)

$F(a)=F(1)-\text{aire}(D_1)$ (voir figure)

$F(1)=\frac{\pi}{4}$

$$aire D_1=\frac{\theta}{2}\times 1^2-aire(OHM)=\frac{\theta}{2}-\frac{a.f(a)}{2}$$

d'où $F(a)=\frac{\pi}{4}-(\frac{\theta}{2}-\frac{a.f(a)}{2})$

$$F(a)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$$

b) * $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$$F(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3/4}}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

* $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$

$$F(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1/4}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$$

EX 25 :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x.dx$

1) a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1+tg^2x)-1\right)dx$

$= \left[tg(x)-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+3}x.dx$

pour : $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ on a : $0 \le tgx \le 1$

$\Rightarrow 0 \le tg^{n+3}x \le tg^{n+2}x \Rightarrow 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+3}x.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x.dx$

$\Rightarrow 0 \le I_{n+1} \le I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) (I_n) est décroissante et minorée par 0
elle est donc convergente.

3) a) $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(tg^{n+2}x + tg^{n+4}x\right)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+tg^2x\right).tg^{n+2}x.dx = \left[\frac{1}{n+3}tg^{n+3}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+3}$

b) $I_{n+2} \ge 0 \Rightarrow I_n + I_{n+2} \ge I_n$

$\Rightarrow \frac{1}{n+3} \ge I_n$ or $I_n \ge 0$

d'où $0 \le I_n \le \frac{1}{n+3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

EX 26 :

$f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \in]0,+\infty[$

1) $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\int_1^n f(x)dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^n = 1-\frac{1}{n}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n}) = 1$

2) $k \in \mathbb{N}^*$

$\int_k^{k+1} f(x)dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

3) $\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{k(k+1)}$

$S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx$

$S_n = \int_1^{n+1} f(x)dx = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

EX 27 :

$f(x) = \frac{1}{x^3}$; $x \in [1,+\infty[$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$; $n \ge 1$

1) a) $f'(x) = \frac{-3}{x^4} < 0 \quad \forall x \in [1,+\infty[$

d'où f est décroissante sur $[1,+\infty[$

$f(x) = \frac{1}{x^3} \ge 0 \qquad \forall x \in [1,+\infty[$

b) $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \ge 0$

d'où (S_n) est croissante

2) a) * $\int_1^n f(t)dt = \int_1^n \frac{1}{t^3}.dt = \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$

* $n \ge 1 \Rightarrow n^2 \ge 1 \Rightarrow -2n^2 \le -2 \Rightarrow \frac{-1}{2n^2} \ge \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} \le \frac{-1}{2n^2} \le 0 \Rightarrow 0 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \le \frac{1}{2}$

doù $0 \le \int_1^n f(t).dt \le \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}) = \frac{1}{2}$

3) a) $k \geq 2$.

* pour $k \leq t \leq k+1$ on a : $f(t) \leq f(k)$ (car f est décroissante)

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt \Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).[k+1-k]$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \quad (1)$$

* pour $k-1 \leq t \leq k$ on a : $f(k) \leq f(t)$

$$\Rightarrow \int_{k-1}^{k} f(k).dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \Rightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

b) pour $k \geq 2$

$$\int_k^{k+1} f(t).dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t).dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t).dt$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = S_n - f(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt = \int_2^{n+1} f(t)dt$$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t).dt = \int_1^{n} f(t)dt$$

d'où $\int_2^{n+1} f(t).dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^{n} f(t).dt$

c) $f(1)=1$

$$\int_1^{n} f(t).dt \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \int_2^{n+1} f(t).dt \geq 0$$

d'où $0 \leq S_n - 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + .. + \frac{1}{n^3}$$

(S_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente ; soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} S_n$

$$1 \leq S_n \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq \ell \leq \frac{3}{2}$$

EX 28 :

1) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$

$I = [-1,3]$

$$\overline{f} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{4} \times \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3} = \frac{41}{5}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 1$

$I = [2,4]$

$$\overline{f} = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x^2} - x\right]_{2}^{4} = \frac{-61}{64}$$

3) $f(x) = \sin(2x)$

$I = [0,\pi]$

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\pi} = 0$$

EX 29 :

soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$; $x \in [2,4]$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x+1)} < 0 \ ; \ \forall x \in [2,4]$$

f est décroissante

$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(4) \leq f(x) \leq f(2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$$

f est continue sur $[2,4]$ et $\frac{1}{13} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$

d'où $\frac{1}{13} \leq \overline{f} \leq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)dx \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{13} \leq \int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2}{3}$$

EX 30 :

soit $f(x) = \frac{1}{3 + tg^2 x}$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq tgx \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq tg^2 x \leq 3 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq 3 + tg^2 x \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{3}{10}$$

f est continue sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ et $\frac{1}{6}\le f(x)\le\frac{3}{10}$

d'après le théorème de la moyenne :

$$\frac{1}{6}\le \bar{f}(x)\le\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{6}\le\frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx\le\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{36}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{3+tg^2x}\le\frac{\pi}{20}$$

EX 31 :

$$V=\pi.\int_0^2 x^4dx=\pi.\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32\pi}{5}\ \mathbf{u.v}$$

EX 32 :

$$V=\pi.\int_1^3\frac{1}{x^2}dx=\pi.\left[\frac{-1}{x}\right]_1^3=\frac{2\pi}{3}\ \mathbf{u.v}$$

EX 33 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x dx=\pi.[tgx-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=(1-\frac{\pi}{4}).\pi\ \mathbf{u.v}$$

EX 34 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x\sin x)dx$$

$$=\pi.\left[x+\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.(1+\frac{\pi}{2})\ u.v$$

EX 35 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2.dx-\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$$

$$=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2.dx-\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\pi.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2-\pi.\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{3}(\frac{\pi}{2})^3-\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^2}{4}\ \ u.v$$

EX 36 :

I. $F(x)=\int_0^{tgx}\frac{dt}{1+t^2}$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

1) la fonction : $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur IR

la fonction : $x\mapsto tgx$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$tg\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=[0,1]\subset IR$ et $0\in IR$

d'où f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et

$$F'(x)=(tgx)'.\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x}=1$$

2) F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et F'(x)=1

d'où F(x)=x+k ; $k\in IR$

$F(0)=\int_0^0\frac{dt}{1+t^2}=0 \Rightarrow 0+k=0 \Rightarrow k=0$

d'où F(x)=x ; $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

3) $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{tg\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{1+t^2}=F(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

II / $I_n=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^n}$ $n\in$

1) * $I_0=\int_0^1 dt=[t]_0^1=1$

$$*I_1=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

2) $n\ge 1$

$$I_{n+1}=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$I_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

intégration par parties :

on pose $\begin{cases}U'(t)=1\xrightarrow{P}U(t)=t\\ V(t)=\frac{1}{(1+t^2)^n}\xrightarrow{d}V'(t)=\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\end{cases}$

$$I_n=\left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^1+2n.\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n.\int_0^1\frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\left[\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^n}-\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}\right]$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\left[I_n-I_{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{1}{2^n}+2n.I_n-2n.I_{n+1}\Rightarrow 2n.I_{n+1}=\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n$$

d'où $I_{n+1}=\frac{1}{2.n}\left[\frac{1}{2^n}+(2n-1).I_n\right]$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-I_1\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$$

$$I_3=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+3I_2)=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{8}$$

$$I_4=\frac{1}{6}(\frac{1}{8}-5.I_3)=\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{64}$$

III/ $J_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$

$J_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$; $n\geq 1$

1) a) pour n=0 : $J_0=\frac{\pi}{4}$

$$0\leq J_0\leq\frac{1}{1+2\times 0}=1$$

* pour $n\geq 1$

$0\leq t\leq 1\Rightarrow 0\leq t^2\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+t^2\leq 2$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1\Rightarrow 0\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq\frac{t^{2n}}{1+t^2}\leq t^{2n}\Rightarrow 0\leq\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 t^{2n}.dt$$

$$\Rightarrow 0\leq J_n\leq\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\Rightarrow 0\leq J_n\leq\frac{1}{2n+1}$$

b) $0\leq J_n\leq\frac{1}{2n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}J_n=0$

2) a) $J_{n+1}+J_n=\int_0^1\frac{t^{2n+2}+t^{2n}}{1+t^2}dt$

$$=\int_0^1\frac{t^{2n}(1+t^2)}{1+t^2}dt=\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$$

b) * $J_0=\frac{\pi}{4}$

* $J_1+J_0=1\Rightarrow J_1=1-\frac{\pi}{4}$

* $J_2+J_1=\frac{1}{3}\Rightarrow J_2=\frac{1}{3}-(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$

$J_3=\frac{13}{5}-\frac{\pi}{4}$

$J_4=\frac{\pi}{4}-\frac{156}{35}$

$J_5=\frac{1439}{315}-\frac{\pi}{4}$

3) $U_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{1+2n}$

a) $1=J_1+J_0$

$\frac{1}{3}=J_2+J_1$

$\frac{1}{5}=J_3+J_2$

$\frac{1}{7}=J_4+J_3$

.

.

$\frac{1}{2n+1}=J_{n+1}+J_n$

d'où

$$U_n=(J_1+J_0)-(J_2+J_1)+(J_3+J_2)+..+(-1)^n(J_{n+1}+J_n)$$

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(J_k+J_{k+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_{k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}J_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^kJ_k$$

$$U_n=J_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.J_k-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^kJ_k+(-1)^{n+1}J_{n+1}\right)$$

$$U_n=J_0-(-1)^{n+1}J_{n+1}=J_0+(-1)^nJ_{n+1}$$

$$\Rightarrow(-1)^nJ_{n+1}=U_n-J_0\Rightarrow J_{n+1}=(-1)^n(U_n-J_0)$$

b) $|U_n-J_0|=|J_{n+1}|$

$\lim_{n\to+\infty}J_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}|J_{n+1}|=0$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(U_n-J_0)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=J_0=\frac{\pi}{4}$$

EX 37 :

$n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$$

1) a) soit $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$; $x \in [0,1]$

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} < 0$$

f est décroissante sur $[0,1]$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq (x) \leq f(0) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x^2+x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2+x} \leq x^n \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3}x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

2) a) $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$$

intégration par parties :

$$\begin{cases} U'(x)=x^n \xrightarrow{p} U(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ V(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \xrightarrow{d} V'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$$

b) $3(n+1).I_n = 1 + 3\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$ (*)

soit $g(x) = \frac{(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$; $x \in [0,1]$

* $g'(x) = \frac{-6(x^2+x)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$

g est décroissante sur $[0,1]$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq (0) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{9}x^{n+1} \leq \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2} \leq x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{9}x^{n+1}dx \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{9}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(n+2)} \leq 3\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1).I_n \leq 1+\frac{3}{n+2}$$ (d'aprés *)

c) $1+\frac{1}{3(n+2)} \leq 3n.I_n + 3I_n \leq 1+\frac{3}{n+2}$

$$\Rightarrow 1-3I_n+\frac{1}{3(n+2)} \leq 3n.I_n \leq 1-3I_n+\frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{9(n+2)} \leq n.I_n \leq \frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{n+2}$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{9(n+2)}\right)=\frac{1}{3}$ car $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{3}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} n.I_n=\frac{1}{3}$

EX 38 :

$x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}.dt$$

1) ☐la fonction : f: $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

☐la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1] \subset [-1,1]$, et $0 \in [-1,1]$

d'où F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

$F'(x)=\cos x.f(\sin x)=\cos x.\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x.|\cos x|$

$F'(x)=\cos^2 x$ car $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) F est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$F'(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

d'où $F(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+k \quad (k\in\mathbb{R})$

$F(0)=\int_0^0\sqrt{1-t^2}\,dt=0 \Rightarrow 0+k=0 \Rightarrow k=0$

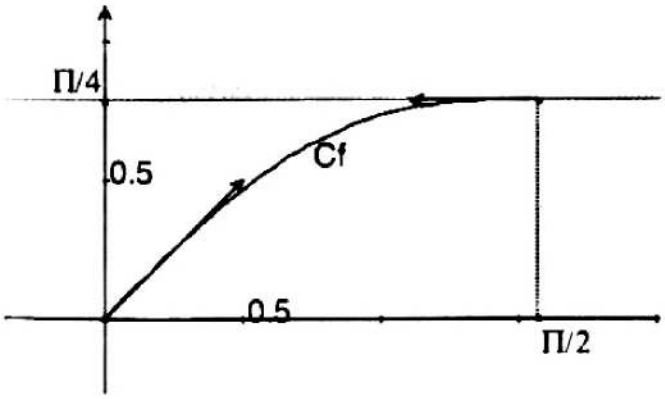
d'où $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

3) $\int_0^1\sqrt{1-t^2}.dt=\int_0^{\sin\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-t^2}.dt=F(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$

4) $F(x)=\cos^2 x\geq 0$

$F'(0)=1$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
F'(x)	0	+	0
F(x)	0	↗	$\frac{\pi}{4}$



EX 39 :

$f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ $x\in[-2,2]$

1) $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)+\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2^-}1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}1+\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$

$=\lim_{x\to 2^-}1-\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

f non dérivable à gauche en 2

⇒ de meme f non dérivable à droite en (-2)

⇒ f est dérivable sur]-2,2[

$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

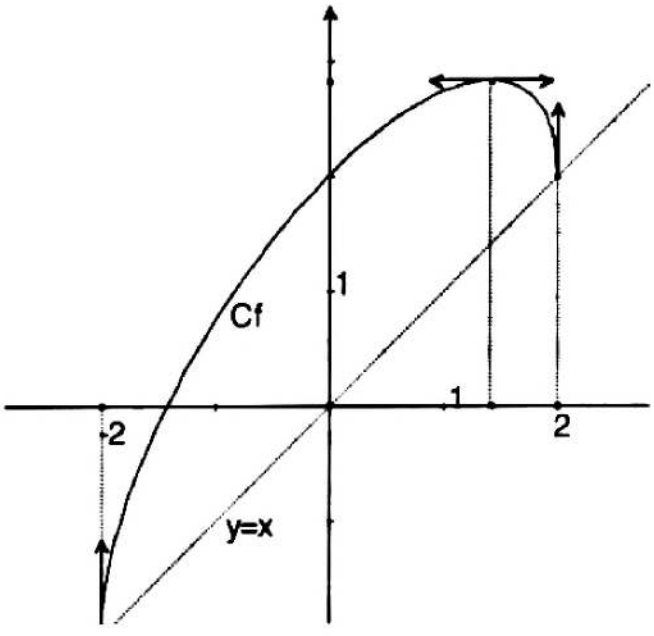
* pour $x\in\,]-2,0]\rightarrow f'(x)>0$

* pour $x\in[0,2[\ : f'(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}(\sqrt{4-x^2}+x)}$

$=\frac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}(\sqrt{4-x^2}+x)>0}$ signe de $(\sqrt{2}-x)$

x	-2		$\sqrt{2}$		2
f'(x)	|	+	0	-	|
f(x)	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



2) $F(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt \quad x\in[0,\pi]$

a) ▫ la fonction g: $t\mapsto\sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2,2]$

▫ la fonction U: $x\mapsto 2\cos x$ est dérivablesur $[0,\pi]$

$U([0,\pi])=[-2,2]$ et $0\in[-2,2]$

d'où F est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$F'(x)=U'(x).g(U(x))=-2\sin x\sqrt{4-4\cos^2 x}$

$F'(x)=-2\sin x\sqrt{4\sin^2 x}=-4\sin x|\sin x|=-4\sin^2 x$

(car $x\in[0,\pi]\rightarrow \sin x\geq 0$)

b) $F(\frac{\pi}{2})=\int_0^0\sqrt{4-t^2}\,dt=0$

c) F est continue sur $[0,\pi]$

$F'(x)=-4\sin^2 x=-2(1-\cos 2x)$

$F(\frac{\pi}{2})=0$

d'où $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}F'(t).dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}-2(1-\cos 2t)dt$

$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(-2+2\cos 2t)dt=[-2t+\sin(2t)]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$

$F(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

3) a) $A=\int_{-2}^{2}(f(t)-t)dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$

$A=\int_{-2}^{0}\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{0}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$

$A=\int_{0}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt-\int_{0}^{-2}\sqrt{4-t^2}\,dt$

$A=\int_{0}^{2\cos 0}\sqrt{4-t^2}\,dt-\int_{0}^{2\cos\pi}\sqrt{4-t^2}\,dt$

$A=F(0)-F(\pi)$

b) $A=F(0)-F(\pi)=\pi-(-2\pi+\pi)$

$A=2\pi$ u.a